**ЛЕКЦИЯ 7. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ.**

**ЛИТЕРАТУРА. Учебник [1] Глава 14. §14.1,14.2,14.4**

**§ 7.1 Устойчивость задачи Коши.**

Как известно из теории ОДУ задача Коши является корректной: ее решение существует и непрерывным образом зависит от правой части и начального условия. Рассмотрим более подробно вопрос об устойчивости задачи Коши.

Для этого рассмотрим две задачи A и B:

A)  B) 

 (7.1)  (7.2)

Задача В – является «возмущенной» по отношению к задаче А : здесь внесено возмущение как в начальное условие , так и в правую часть .

Обозначим через, . Вычтем из задачи А задачу В. Получим:





Воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа:

, где , где  промежуточное значение между и. Тогда погрешность  удовлетворяет следующей задаче Коши:





Представим полученную задачу в виде двух более простых задач: 

а)  б) 

 

Здесь  отвечает за погрешность в начальных условиях, а  за погрешность в правой части уравнения. Решениями задач а) и б) являются функции:

 , .

Рассмотрим первую функцию. Число  играет роль коэффициента роста ошибки. Так как , то знак производной  оказывает существенное влияние на поведение погрешности : если , то  монотонно возрастает и начальная погрешность  возрастает. При этом, естественно, что решение становится неустойчивым. Если же , то исходная погрешность с ростом *t* монотонно убывает, интегральные кривые сближаются. В случае, когда производная  незнакопостоянна, поведение погрешности неизвестно.

Важно отметить следующее: если рассматривается решение задачи на конечном отрезке, то рост ошибки будет ограниченным, так как:



Поэтому функцию  можно оценить так:



Возвращаясь к исходной задаче, получим неравенство:



Или:

 (7.3)

Оценка (7.3) выражает устойчивость решения задачи Коши по начальным данным и правой части. Здесь . Величина K(T) играет роль числа обусловленности задачи.

**§7.2 СХОДИМОСТЬ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА.**

Для k- шагового метода будем считать, что известны значения 

Тогда каноническая форма явного k-шагового метода примет вид:

 (7.4)

 известны.

Каноническая форма неявного k-шагового метода имеет вид:

 (7.5)

 известны.

Выражение (7.5) отличается от (7.4) тем, что в левую, и в правую части входит неизвестное значение .

**ОПР.** Будем называть задачу (7.5) k -шаговым неявным разностным методом или дискретной задачей Коши в канонической форме.

Наряду с задачей (7.5) рассмотрим «возмущенную задачу» :

 (7.5\*)

 известны.

В этой задаче погрешность содержится в начальных данных и в правой части уравнения .

**ОПР.** Будем называть дискретную задачу Коши (7.5) и соответствующий численный метод устойчивым на конечном отрезке, если при всех  справедливо неравенство:

****  (7.6)

где величина K(T) не зависит от , , *h.*

Неравенство (7.6) является дискретным аналогом неравенства (7.3) .

**ОПР.** Пусть y(t) – решение задачи Коши. Назовем сеточную функцию , определяемую

формулой

 (7.7)

Погрешностью аппроксимации на решении y(t).

***Замечание****.* Из определения следует, что функция y(t) удовлетворяет уравнению (7.5) с

точностью до погрешности аппроксимации.

Сеточную функцию  используют для предварительной оценки того, насколько точно

аппроксимируется дифференциальное уравнение сеточным аналогом

**ОПР.** Говорят, что разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с p-ым порядком, если **,** p>0

Cправедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 7.1.** Пусть численный метод устойчив на конечном отрезке и имеет порядок аппроксимации *p*. Тогда если начальные значения  заданы с *р*-ым порядком точности, то и метод сходится с *р*-ым порядком точности по *h*.

**Доказательство:** Пусть - величина погрешности аппроксимации на i-ом шаге.

Так как метод устойчив, то справедливо неравенство:

****

Заметим, что здесь в качестве функции взята функция - точное решение задачи.

Учитывая, что **,** окончательно неравенство примет вид:

****  ч.т.д.

Далее будем изучать вопрос устойчивости метода к малым погрешностям входных данных.

Пусть - решение, соответствующее значениям , а - решение той же задачи, соответствующее начальным значениям .

Если отрезок и шаг h фиксирован, то устойчивое решение непрерывным образом зависит от начальных значений и справедливо неравенство:

** (7.8)**

Величина K(T) играет роль числа обусловленности задачи.

**§ 7.3**  **Нуль -устойчивость**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метод называется нуль-устойчивым**, если для решения задачи Коши с дифференциальным уравнением

 **(7.9)**

выполняется условие:

****

Где не зависит от h, =, i=0, …k-1.

Исследуем вопрос, когда метод обладает свойством нуль-устойчивости.

Запишем метод (7.5) для модельного уравнения . Тогда:

 (7.10)

Здесь коэффициенты  известны, а неизвестны значения . Такие уравнения называются линейными разностными уравнениями k-го порядка.

Пусть  - решение того же уравнения, соответствующего возмущенным начальным значениям:

. (7.11)

Тогда в силу линейности:

 (7.12)

Будем искать частное решение задачи в виде: . Тогда

,

Сократив это уравнение на , получим: 

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ,** Многочлен  называется характеристическим многочленом, а уравнение

 **(7.13)**

Называется характеристическим уравнением.

Известны следующие факты из теории конечно-разностных уравнений:

1. Пусть *q*  - простой корень характеристического уравнения (6.9). Тогда функция является решением разностного уравнения (7.13).

2. Пусть *q*- кратный корень характеристического уравнения кратности *m*. Тогда ему отвечают частные решения уравнения (7.13) вида : . Пусть - корни характеристического уравнения (7.13), a  - их кратности. Тогда всякое решение уравнения (7.13) может быть представлено в виде:

 **(7.14)**

В частности, если все корни  - простые, то справедливо представление:



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Будем говорить, что выполнено **корневое условие**, если все корни  характеристического уравнения лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости , причем на границе единичного круга нет кратных корней.

Заметим, что *q*=1 всегда является корнем характеристического уравнения.

**ТЕОРЕМА**. 7.2 Для того, чтобы метод обладал нуль-устойчивостью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось корневое условие.

Необходимость. Пусть метод обладает свойством нуль-устойчивости, но корневое условие

не выполнено. Тогда характеристическое уравнение имеет или простой корень *q* ,

или корень кратности такой, что . Ясно, что и в первом случае ()и во втором случае, когда . Начальные погрешности  могут быть сделаны сколь угодно малыми, но в то же время  при .

Достаточность вытекает из представления решения **(7.14)**

**.**

**ТЕОРЕМА.7**.3. Методы Рунге-Кутты и Адамса обладают свойством нуль-устойчивости.

Доказательство: методам Рунге-Кутты соответствует однородное разностное уравнение:

, а ему в свою очередь соответствует характеристическое уравнение .

Последнее уравнение имеет корень , то есть корневое условие выполнено.

Аналогично, *k*-шаговому методу Адамса соответствует разностное уравнение



А ему соответствует характеристическое уравнение . Последнее уравнение имеет один простой корень *q*=1и корень *q*=0 кратности k-1, то есть корневое условие выполняется.

**ПРИМЕР 7.1.**  Рассмотрим следующий метод:



Метод является явным двухшаговым методом. Найдем порядок аппроксимации и исследуем метод на нуль-устойчивость.

-

--- == .

Метод имеет второй порядок аппроксимации по *h.*

Исследуем метод на нуль-устойчивость.

Запишем характеристическое уравнение:

,  - корневое условие не выполнено. Метод не является нуль-устойчивым.

Используя данный метод, найдем решение следующей простой задачи.

**ПРИМЕР 7.2.**





Ясно, что решением данного уравнения является функция *y(t)=sin(t)*.

Возьмем *h=0.05* и выполним табулирование точного решения и найдем для сравнения решение методом Эйлера.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Y точное | 0 | 0.04998 | 0.09983 | 0.14944 | 0.19867 | 0.2474 | 0.29552 | 0.34290 |
| Yэйлера | 0 | 0.05 | 0.09994 | 0.14969 | 0.19913 | 0.24813 | 0.29658 | 0.34434 |
| Y метода б/п | 0 | 0.04998 | 0.09986 | 0.14944 | 0.19876 | 0.24733 | 0.2958 | 0.34252 |
| Y метода С начальной погрешностью | 0 | 0.04 | 0.10984 | 0.1195 | 0.24866 | 0.13757 | 0.50536 | -0.08658 |

Графики:



Заметим, что в начальные условия мы внесли погрешность 0.04-0.04998=0.00998.

Это 20%.

Оказывается, что для линейных многошаговых методов выполнение корневого условия гарантирует не только нуль-устойчивость, но и устойчивость на конечном отрезке.

ТЕОРЕМА. Пусть и выполнено корневое условие. Пусть для неявного метода выполнено условие на шаг: . Тогда метод устойчив на конечном отрезке.

**§ 7.4. Абсолютная устойчивость**

Нуль-устойчивость гарантирует устойчивое развитие погрешностей только в том случае, когда отрезок  фиксирован. При  наличие нуль-устойчивости не исключает неограниченного роста погрешностей во входных данных. Значительную часть непригодных методов можно отбросить, если исследовать их применение к решению модельной задачи:





Решение задачи устойчиво по Ляпунову, если комплексный параметр удовлетворяет условию  и асимптотически устойчиво, если .

Запишем численный метод в применении к модельной задаче:



Здесь - некоторые зависящие от величины  функции. В силу линейности уравнения ошибка , возникающая из-за погрешностей в начальных значениях, удовлетворяет тому же уравнению:



Перенесем все в левую часть, тогда получим:



Обозначим через , здесь . Тогда получим следующее уравнение:



Как было замечено ранее, это есть линейное однородное разностное уравнение. Для того, чтобы при фиксированном z погрешность оставалась ограниченной принеобходимо и достаточно, чтобы было выполнено корневое условие. Введем в рассмотрение полином:



Это полином абсолютной устойчивости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Метод называется абсолютно устойчивым при данном , если все корни полинома устойчивости лежат внутри единичного круга и на границе этого круга нет кратных корней.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество точек D комплексной плоскости, состоящее из точек z, для которых метод абсолютно устойчив, называют областью абсолютной устойчивости метода.

**ПРИМЕР 7. 3**. Найдем область абсолютной устойчивости явного метода Эйлера.

Рассматриваем уравнение  и формулу явного метода Эйлера:



Отсюда вытекает следующее соотношение:

 и далее как следствие: .

Следовательно, полином устойчивости имеет вид: . Очевидно, что корень полинома равен . Потребуем выполнения корневого условия: 

Очевидно, что область устойчивости D – круг единичного радиуса с центром в точке z=-1.

Чертеж.1.

Пусть  - вещественное число, рассматриваются асимптотические решения.

Тогда . Условие  дает ограничение на шаг:

. Следовательно, метод Эйлера является устойчивым при  при шаге .

**ПРИМЕР 7.4.** . Найдем область абсолютной устойчивости неявного метода Эйлера.

Рассматриваем уравнение  и формулу неявного метода Эйлера:



Отсюда вытекает следующее соотношение:

 и далее как следствие: . Следовательно, полином устойчивости имеет вид: . Очевидно, что корень полинома равен . Потребуем выполнения корневого условия: 

Очевидно, что область устойчивости D – внешность круга единичного радиуса с центром в точке z=1.

Чертеж. 2.

Пусть  - вещественное число, рассматриваются асимптотические решения.

Тогда . Первое условие выполнено, а второе условие не выполняется. . Следовательно, неявный метод Эйлера является абсолютно устойчивым методом при любом шаге *h*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Численный метод называется A-устойчивым, если область абсолютной устойчивости включает в себя полуплоскость Re z <0.

Примером A- устойчивого метода является неявный метод Эйлера. К A-устойчивым методам относится также правило трапеций.

Для решения жестких задач следует применять А- устойчивые методы. Однако класс таких задач довольно узок. Например, среди явных методов нет А- устойчивых. Применение неявных методов дает лучшие результаты. Чтобы построить неявные методы можно использовать методы аппроксимации производной при дифференцировании назад.Приведем формулы дифференцирования назад при k= 1,2,3, 4, имеющие k-ый порядок точности:

 k=1,

, k=2

, k=3

Данные методы относятся к методам Гира.